

Optique Géométrique

CHAPITRE 3

Miroirs plans et Sphériques

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Introduction

Un miroir est une portion de surface réfléchissante. Il peut être fait d'un métal poli ou d'un matériau quelconque recouvert d'une couche réfléchissante, d'argent, d'étain ou d'aluminium déposé chimiquement. Nous étudions dans ce chapitre la formation des images par les miroirs plans et sphériques. Les miroirs plans donnent une image virtuelle et nette et de même taille que l'objet. Ils constituent un système parfaitement ou rigoureusement stigmatique. Les miroirs sphériques donnent une image virtuelle ou réelle approximativement nette et de taille plus grande ou plus petite que l'objet. À part leur usage domestique, on utilise les miroirs dans les instruments d'optique (appareils photographiques, microscopes, télescopes, etc.).

Miroir plan

Définition

Un miroir plan est une **surface réfléchissante** plane on dit que c'est un **catadioptr**. Un tel miroir M est généralement représenté par la trace de son plan disposé normalement au plan de figure. **On couvre de hachures le côté non réfléchissant.**

Remarque: Sauf indication contraire, on travaille avec une lumière monochromatique.

Formation d'une image (1)

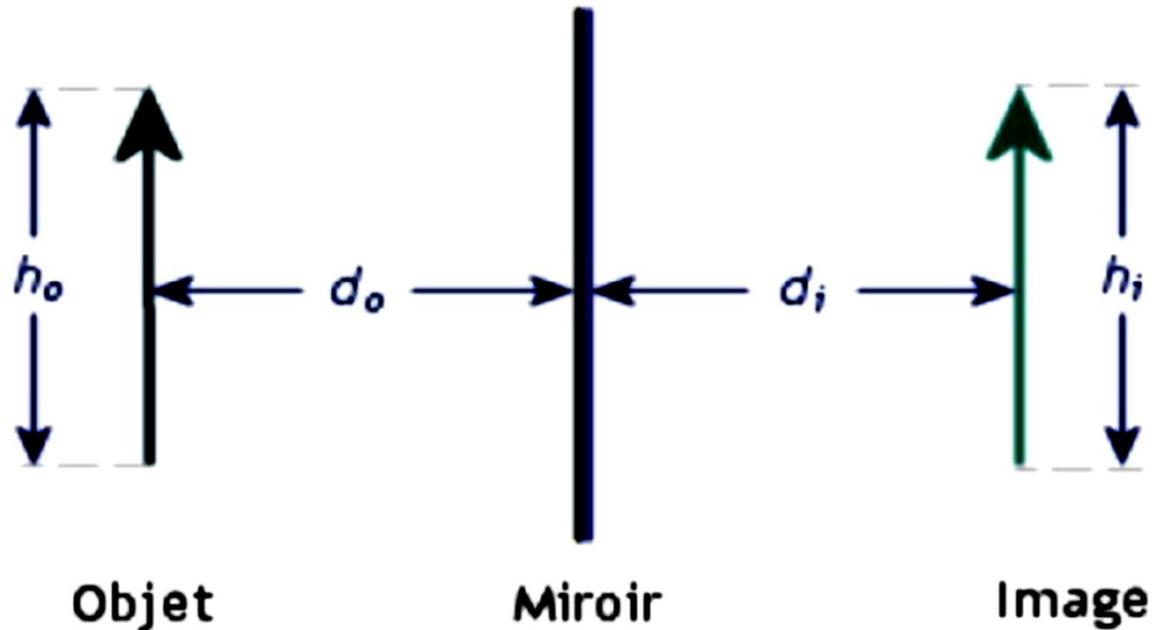
L'image formée par un miroir plan est virtuelle et est située derrière le miroir à une distance égale à la distance entre le miroir et l'objet. Cette image est inversée (gauche-droite) mais pas renversée (haut-bas).

Une image est virtuelle lorsqu'elle est formée à l'intersection du prolongement des rayons réfléchis.

Une image est réelle lorsqu'elle est formée à l'intersection des rayons réfléchis eux-mêmes. L'image réelle peut être projetée sur un écran contrairement à l'image virtuelle.

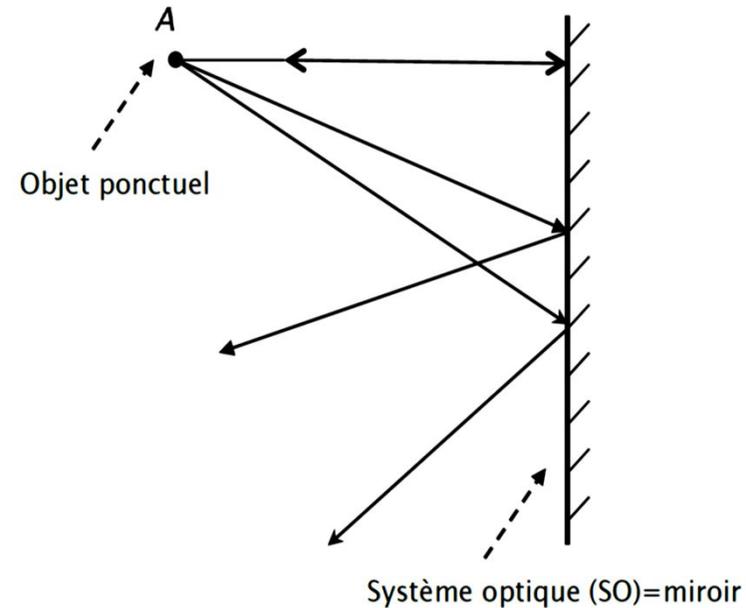
Formation d'une image (2)

L'image produite par un miroir plan de même grandeur que l'objet ($h_1 = h_0$) et à une distance derrière le miroir égale à la distance entre l'objet et le miroir ($d_1 = d_0$).



Stigmatisme rigoureux (1)

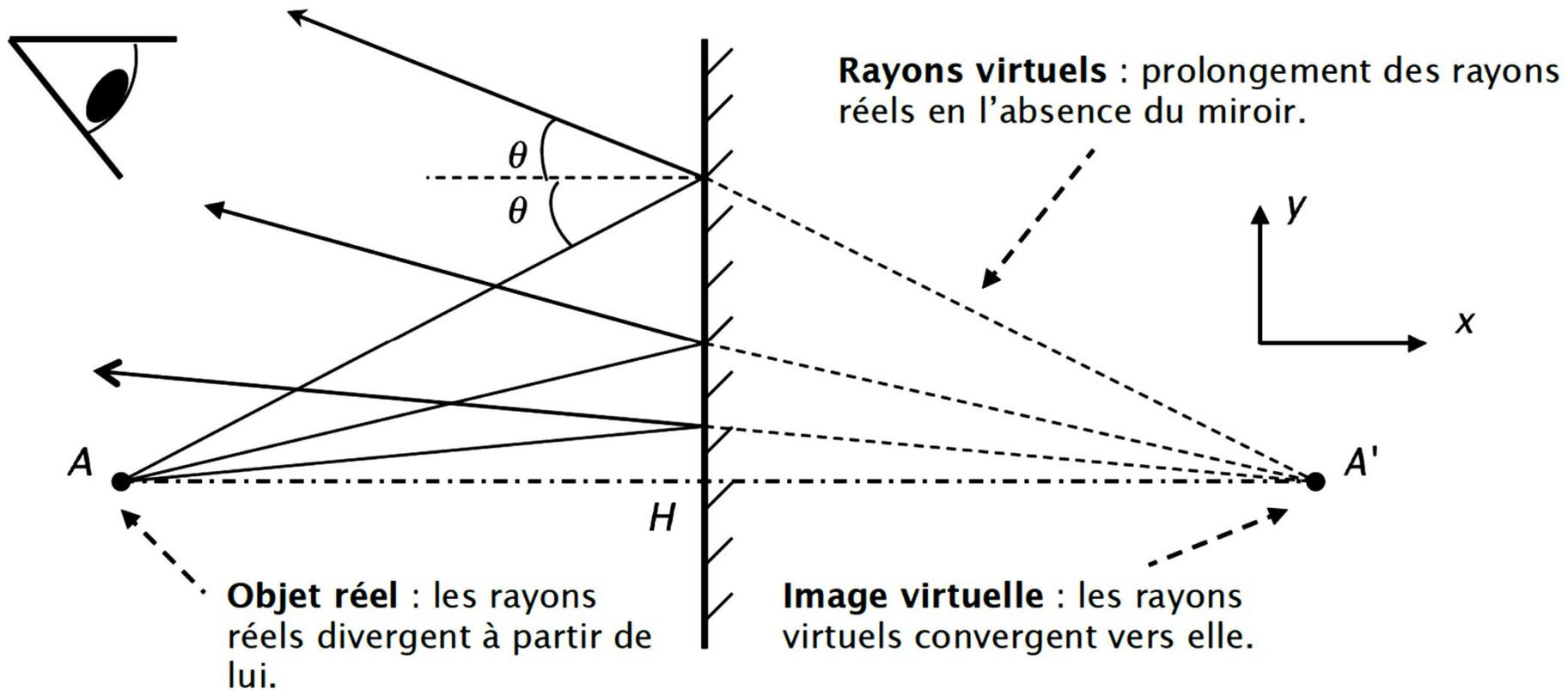
Chaque rayon issu de l'objet ponctuel A est réfléchi en obéissant aux lois de la réflexion. Les rayons réfléchis par le miroir semblent provenir, pour l'œil, de l'image virtuelle A' . Par construction A et A' sont symétriques par rapport à H . Comme tous les rayons issus de A semblent provenir de A' , on dit que le miroir plan est parfaitement **stigmatique** pour le couple : ($A =$ objet réel : $A' =$ image virtuelle)



DEFINITION DU STIGMATISME

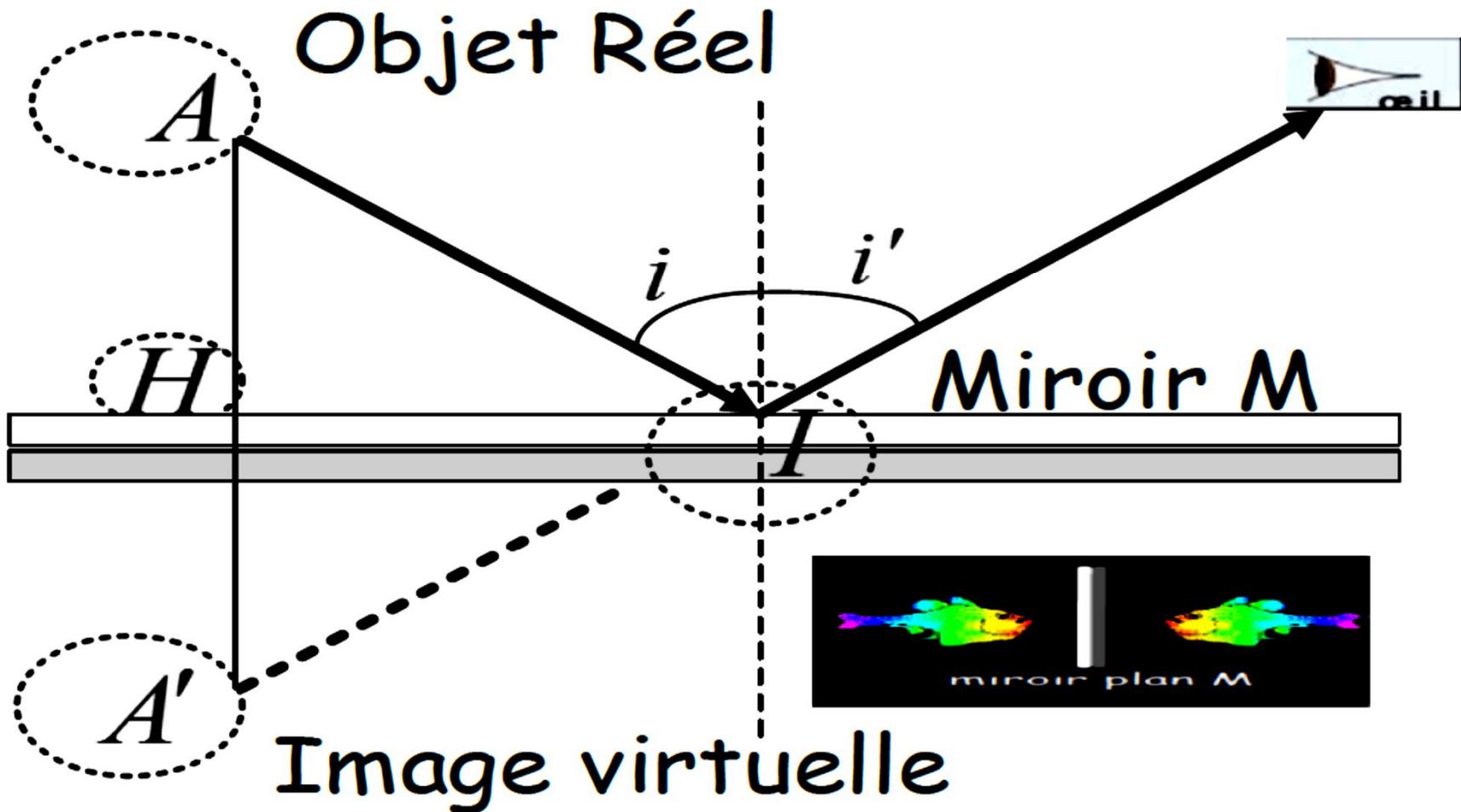
Le stigmatisme est la qualité que présente tout système optique de donner d'un point objet un point image et un seul

Stigmatisme rigoureux (2)



Le stigmatisme est lié à la **netteté** d'une image ; l'image d'un objet par un miroir est toujours nette.

Stigmatisme rigoureux (3)



Relation de conjugaison pour (A, A') (1)

Une **relation de conjugaison** est une **relation algébrique** qui relie la position de l'image A' avec celle de l'objet A en fonction des caractéristiques géométriques du SO en question. Dans le cas du miroir plan, la relation de conjugaison est évidente à l'aide de la figure orientée ci-dessus :

$$\overline{HA} + \overline{HA'} = 0$$

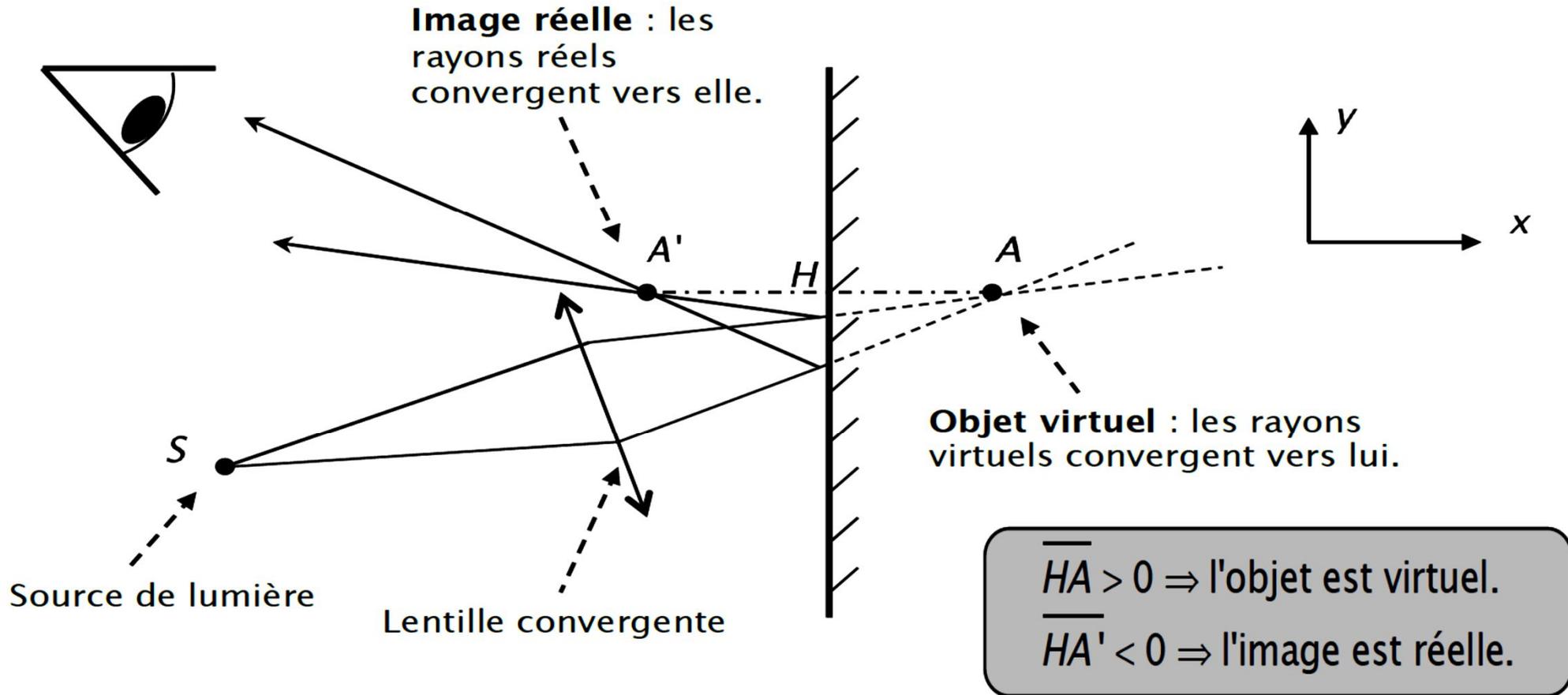
On utilise des grandeurs algébriques (symbolisées par le trait) ce qui nécessite d'orienter la figure. \overline{HA} est positive si on va de H à A dans le sens des x positifs et inversement. Dans le cas du miroir, on a :

Comme nous le verrons dans le cas des autres systèmes optiques (miroirs sphériques, lentilles minces), le résultat ci-contre est tout à fait général.

$$\begin{aligned} \overline{HA} < 0 &\Rightarrow \text{l'objet est réel.} \\ \overline{HA'} > 0 &\Rightarrow \text{l'image est virtuelle.} \end{aligned}$$

Relation de conjugaison pour (A, A') (2)

Il est possible d'envisager un couple (objet virtuel - image réelle) même si la notion d'objet virtuel est plus difficile à concevoir.

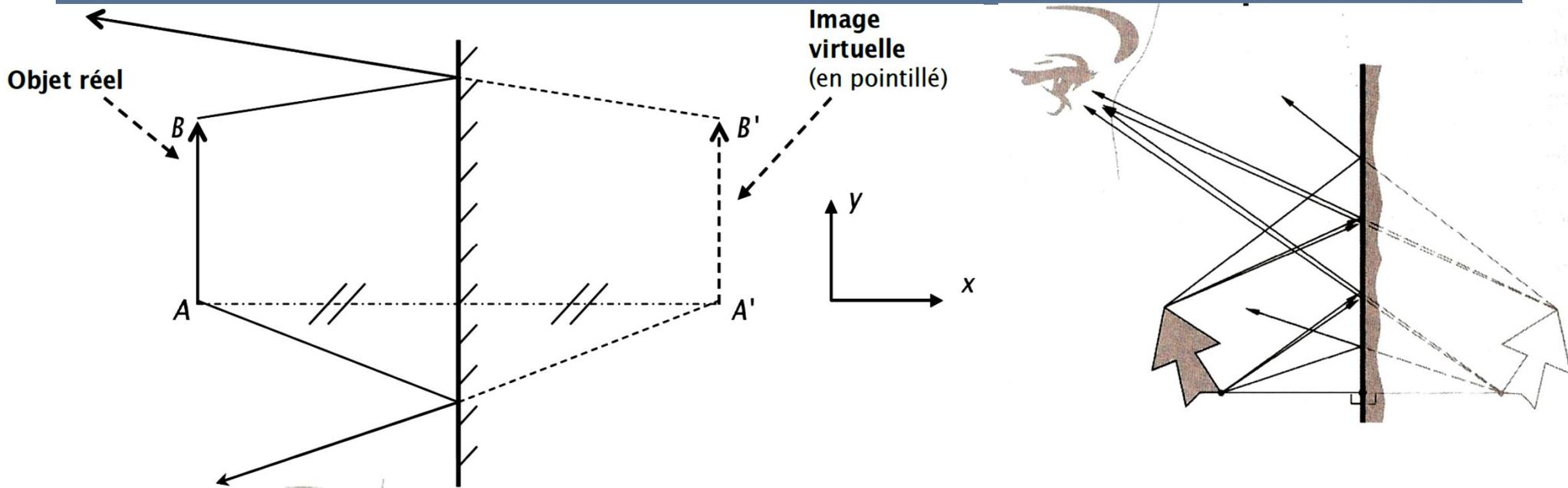


Relation de conjugaison pour (A, A') (3)

La relation de conjugaison $\overline{HA} + \overline{HA'} = 0$ est toujours valable quelle que soit la nature de A et de A' (réelle ou virtuelle).

Pour un miroir plan, l'objet et son image sont toujours de nature différente. Si l'un est réel, l'autre est virtuel et inversement.

Objet et image étendus (1)



Le miroir plan conserve par symétrie la taille des objets. On définit le grandissement transversal (suivant y) de la façon suivante :

Définition du grandissement transversal: $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

Objet et image étendus (2)

Seul le grandissement transversal est au programme, c'est-à-dire que nous étudierons toujours des objets « droits », parallèles au miroir (pas comme sur la figure ci-dessus). Dans le cas du miroir plan, le grandissement transversal vaut simplement un :

Pour le miroir plan: $\gamma = 1$

Attention : L'image n'est pas forcément identique à l'objet à travers un miroir plan. En effet une main droite a pour image une main gauche (cf figure ci-dessous).

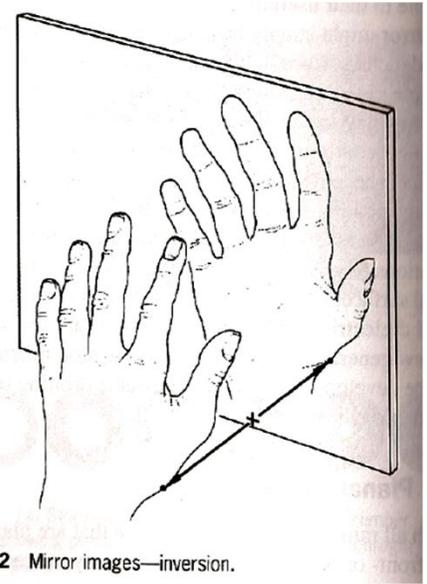
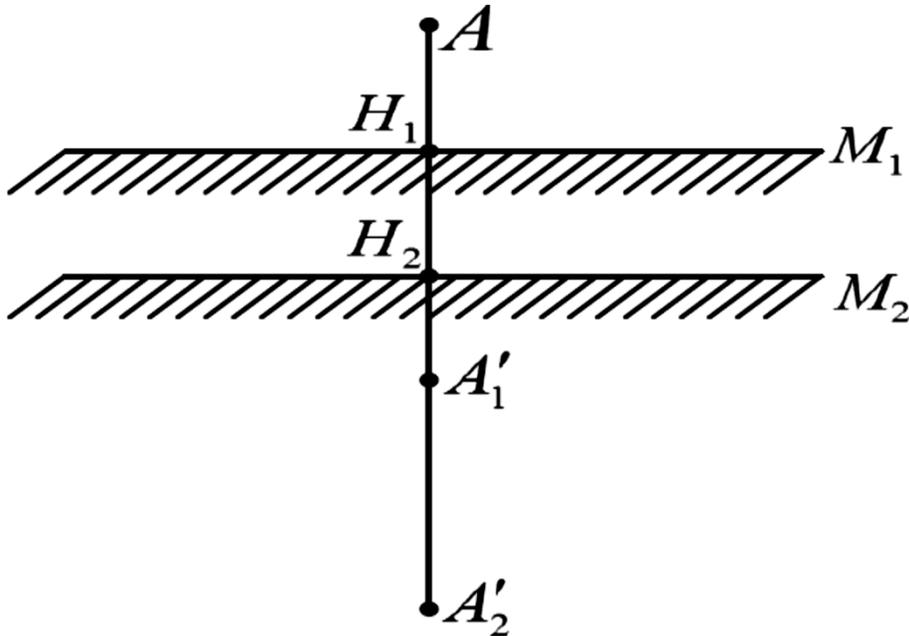


Figure 5.42 Mirror images—inversion.

Translation du miroir



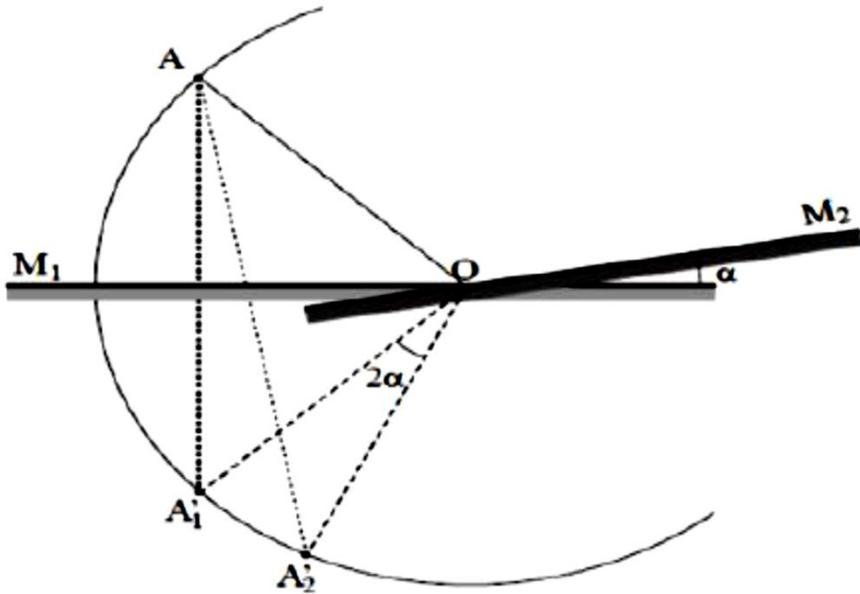
Déplaçons un miroir M à la position M_1 à la position M_2 suivant une direction normale à la surface

$$\begin{aligned} \overline{A'_1 A'_2} &= \overline{A'_1 H_1} + \overline{H_1 H_2} + \overline{H_2 A'_2} \\ \left. \begin{aligned} \overline{A'_1 H_1} &= \overline{H_1 A} \\ \overline{H_2 A'_2} &= \overline{A H_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{A'_1 A'_2} \\ &= \overline{H_1 A} + \overline{H_1 H_2} + \overline{A H_2} \\ &= \overline{H_1 H_2} + \overline{H_1 H_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{A'_1 A'_2} = 2\overline{H_1 H_2}}$$

Ainsi l'image se déplace dans le même sens que le miroir et d'une longueur double.

Rotation du miroir



Tournons le miroir M autour d'un axe passant par O et appartenant à son plan, d'un angle α de la position M_1 à la position M_2 .

A'_1 est symétrique de A par rapport à M_1

A'_2 est symétrique de A par rapport à M_2

Les points A'_1, A'_2 et $A \in \mathcal{C}(O, OA)$

$$\widehat{A'_1 A A'_2} = \alpha$$

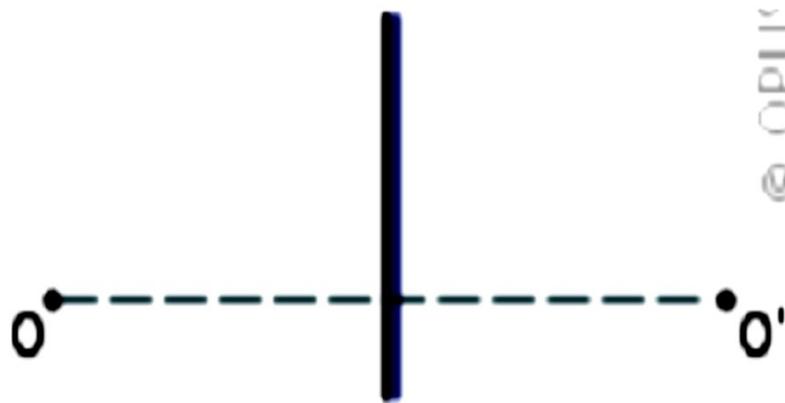
$$\widehat{A'_1 O A'_2} = 2\alpha$$

Lorsqu'un miroir plan tourne d'un angle α autour d'un axe quelconque le rayon réfléchi correspondant à un rayon incident quelconque tourne autour de cet axe et dans le même sens d'un angle double 2α .

Champ de vision (1)

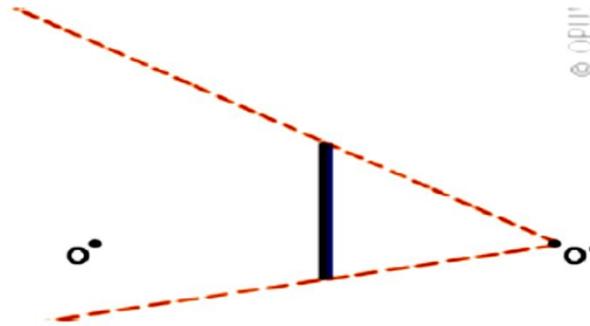
Le champ de vision d'un observateur est l'espace qui est rendu visible grâce, par exemple, à un miroir plan. Pour déterminer le champ de vision d'un observateur placé devant un miroir plan, on procède de la manière suivante :

1. Déterminer la position de l'image (O') de l'observateur (O).

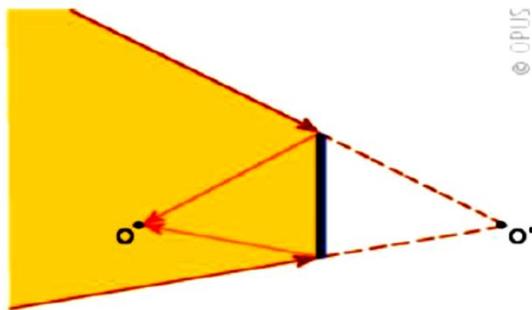


Champ de vision (2)

2. Tracer deux droites ayant pour origine l'image de l'observateur et passant par les extrémités du miroir.



3. Ces deux droites délimitent le champ de vision de l'observateur (en jaune).



Le champ de vision du miroir plan correspond donc à ce que verrait l'observateur s'il était placé à la position de son image O' et si le miroir était remplacé par une fenêtre.

Miroirs

sphériques

On étudiera le miroir sphérique dans le cadre de l'approximation de Gauss.

A. Définition et notation

Définition et notation (1)

Un miroir sphérique est une portion de sphère polie. Les miroirs sphériques sont utilisés dans les instruments d'optique. Ils servent comme focaliseurs des faisceaux de rayons lumineux ou infrarouges des lentilles. Exemples d'utilisation de miroirs sphériques : rétroviseurs de voitures, miroirs de surveillance, télescopes.

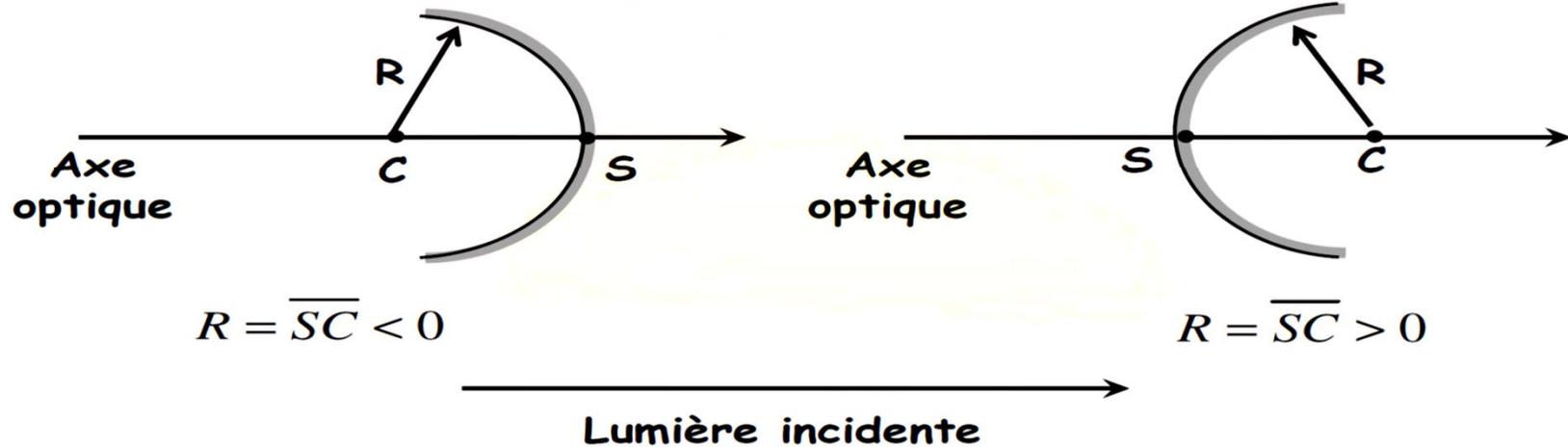
Les miroirs sphériques peuvent être **concaves** ou **convexes** selon qu'ils réfléchissent la lumière vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la sphère. **Le centre C de la sphère est le centre du miroir, l'axe de symétrie CS est l'axe principal et S son sommet.**

Définition et notation (2)

On définit le rayon R (algébrique) par : $R = \overline{SC}$ et $|R|$ le rayon de courbure.

Miroir sphérique concave

Miroir sphérique convexe

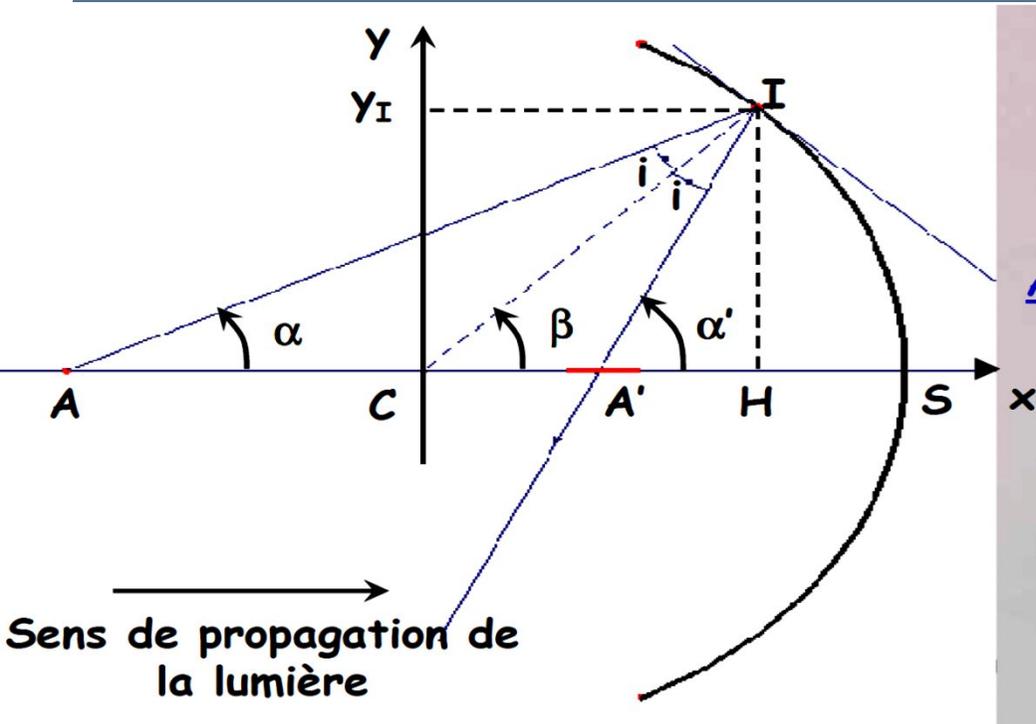


Remarque : en optique géométrique, la mesure des distances est algébrisée. Le long de l'axe optique, on choisit comme sens positif le sens de propagation de la lumière (en général de la gauche vers la droite). Perpendiculairement à l'axe, les distances sont comptées positivement dans le sens de la verticale ascendante.

B. Etude du stigmatisme du miroir sphérique

De façon générale, le miroir sphérique est astigmatique.

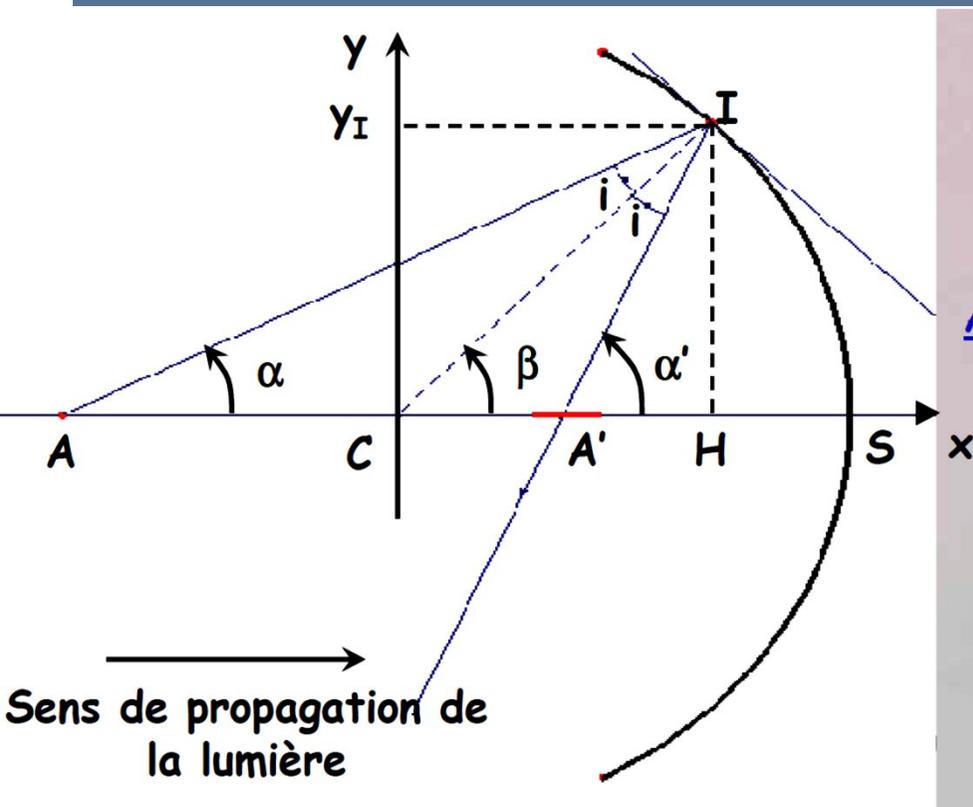
Stigmatisme approché sur l'axe (1)



On se place dans les conditions de Gauss, les angles α , α' et β sont petits : $\sin \alpha \cong \tan \alpha \cong \alpha$. Il en est de même pour α' et β . Dans ces mêmes conditions, les points H et S sont confondus. On appelle relation de conjugaison une relation entre la position d'un objet A et celle de son image A' sur l'axe optique.

L'expression de cette relation dépend du choix de l'origine des positions. Les points H (projeté orthogonal de I sur l'axe optique) et le sommet S sont, dans les conditions de Gauss, confondus). En effet dans le triangle ICH rectangle en H

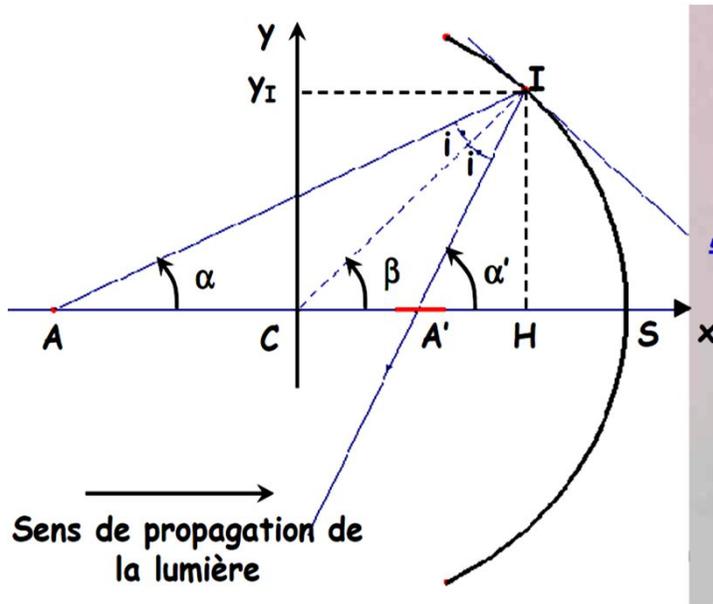
Stigmatisme approché sur l'axe (2)



$$\begin{aligned}
 CI^2 &= CH^2 + IH^2 \\
 CH^2 &= R^2 - y_I^2 = R^2 \left(1 - \frac{y_I^2}{R^2} \right) \Rightarrow CH \\
 &= R \left(1 - \frac{y_I^2}{R^2} \right)^{1/2} \cong R \left(1 - \frac{y_I^2}{2R^2} \right) \\
 &\Rightarrow CH \cong R \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi au 1^{er} ordre en α , $CH \cong R$: les points H et S sont confondus.

Relation de conjugaison (avec origine au sommet) pour un miroir concave



On veut déterminer une relation entre \overline{SA} et $\overline{SA'}$.

$$\alpha \cong \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} \cong \frac{\overline{SI}}{-\overline{SA}} \quad ; \quad \alpha' \cong \frac{\overline{HI}}{\overline{A'H}} \cong \frac{\overline{SI}}{-\overline{SA'}} \quad ;$$

$$\beta \cong \frac{\overline{HI}}{\overline{CH}} \cong \frac{\overline{SI}}{-\overline{SC}}$$

Dans le triangle (AIC) : $\alpha + i + \pi - \beta = \pi \Rightarrow i = \beta - \alpha$

Dans le triangle (A'IC) : $-\alpha' + i + \pi + \beta = \pi \Rightarrow i = -\beta + \alpha'$

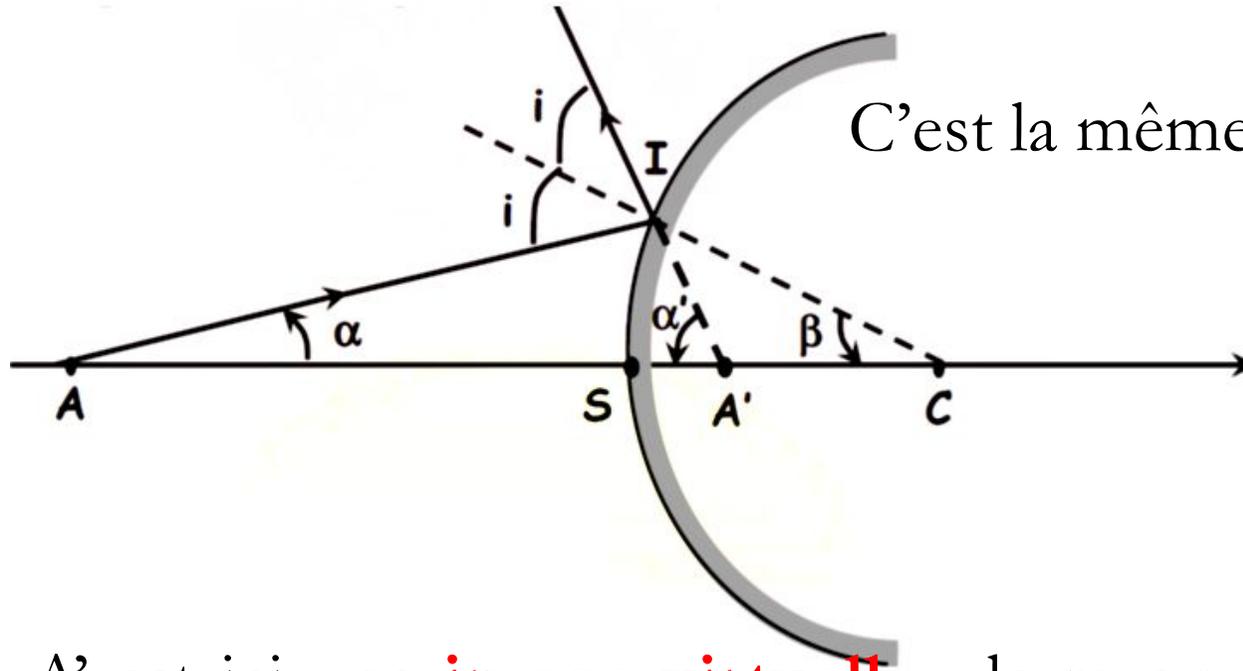
$$\Rightarrow i = \beta - \alpha = -\beta + \alpha' \Rightarrow \boxed{\alpha' + \alpha = 2\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{SI}}{\overline{SA}} + \frac{\overline{SI}}{\overline{SA'}} = 2 \frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{2}{R}}$$

C'est la relation de conjugaison du miroir sphérique concave avec origine au sommet S.

Cette relation montre que pour A' donné, la position A est indépendante du rayon $A'I$: il y a stigmatisme approché pour tout point A de l'axe optique.

Relation de conjugaison (avec origine au sommet) pour un miroir convexe



C'est la même que pour le miroir concave

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC} = \frac{2}{R}$$

A' est ici une **image virtuelle** : le rayon réfléchi semble provenir du point A' (il n'y a pas de lumière à droite du sommet S , dans l'espace « image »). Dans le cas du **miroir concave**, **l'image A' est réelle** : le rayon réfléchi se dirige effectivement vers l'image A' . On peut projeter l'image sur un écran.

Remarques sur la Relation de conjugaison (avec origine au sommet)

- Si le point A est en C

$$\frac{1}{\overline{SC}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{1}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SA'} = \overline{SC} \Rightarrow A' \text{ est C}$$

Si nous avons un objet en C, il se réfléchit en C

- Si $A \rightarrow \infty$: l'objet est à l'infini

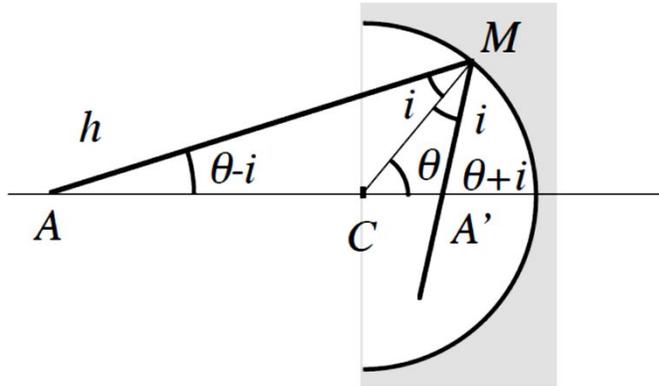
$$\frac{1}{\overline{SA}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SA'} = \frac{\overline{SC}}{2} = \overline{SF} \Rightarrow F \text{ est le foyer image}$$

- Si $A' \rightarrow \infty$: l'image est à l'infini

$$\frac{1}{\overline{SA'}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{2} = \overline{SF} \Rightarrow F \text{ est le foyer objet}$$

F est le point où il faut placer l'objet pour que l'image soit à l'infini

Relation de conjugaison (avec origine au centre) pour un miroir concave



$$\Delta ACM \Rightarrow \frac{\sin i}{AC} = \frac{\sin(\theta - i)}{CM} = \frac{\sin(\theta - i)}{R}$$

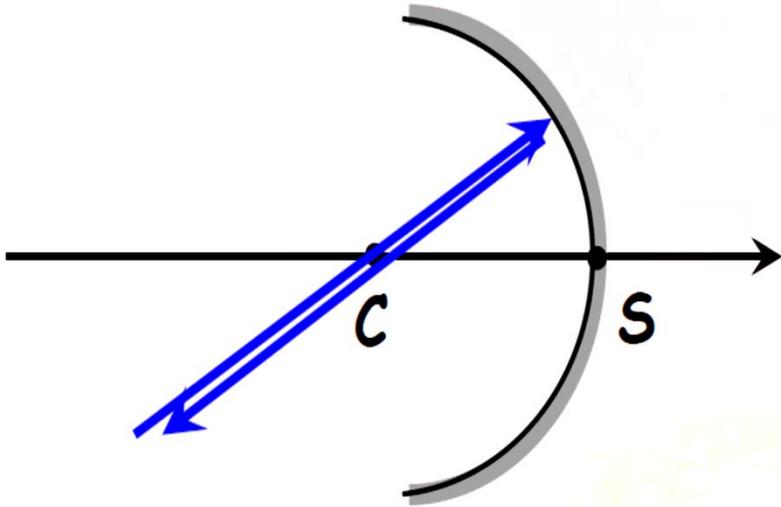
$$\text{Angle petit} \Rightarrow \frac{i}{AC} = \frac{\theta - i}{R} \quad (1)$$

$$\Delta A'CM \Rightarrow \frac{\sin i}{CA'} = \frac{\sin(\theta + i)}{R} \xrightarrow{\text{Angle petit}} \frac{i}{CA'} = \frac{\theta + i}{R} \quad (2)$$

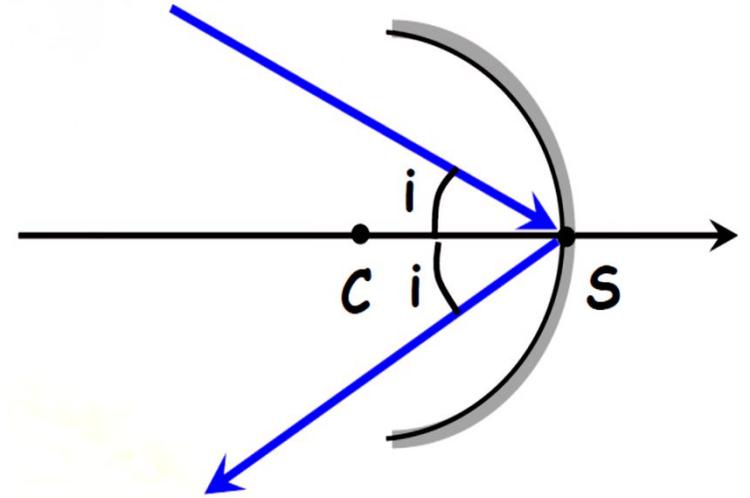
$$(1) - (2) \Rightarrow \frac{i}{AC} - \frac{i}{CA'} = \frac{\theta - i}{R} - \frac{\theta + i}{R} = -\frac{2i}{R} \Rightarrow \frac{1}{AC} - \frac{1}{CA'} = -\frac{2}{R}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{CA} - \frac{1}{CA'} = -\frac{2}{CS} = -\frac{2}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{CA} + \frac{1}{CA'} = \frac{2}{CS} = \frac{2}{R}}$$

Deux points particuliers : le centre C et le sommet S



- Tout rayon passant par C arrive sous incidence normale sur le miroir et revient sur lui-même après réflexion sur le miroir en repassant par C .



- Tout rayon arrivant en S sur le miroir est réfléchi symétriquement en provenant de S .

Application

Exercice : Un objet situé à 30 cm en avant d'un miroir concave de rayon de courbure $R = 10$ cm. Où se trouve l'image?

Solution :

$$\begin{aligned}\overline{SA} &= -30 \text{ cm} & \overline{SC} &= -10 \text{ cm} \\ \frac{1}{\overline{SC}} + \frac{1}{\overline{SA'}} &= \frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \frac{1}{30} + \frac{1}{\overline{SA'}} = -\frac{2}{10} \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{1}{30} - \frac{2}{10} = -\frac{1}{6} \\ & \Rightarrow \overline{SA'} &= \mathbf{-6 \text{ cm}}\end{aligned}$$

C. Foyer image, foyer objet, distance focale, vergence

Foyer image F'

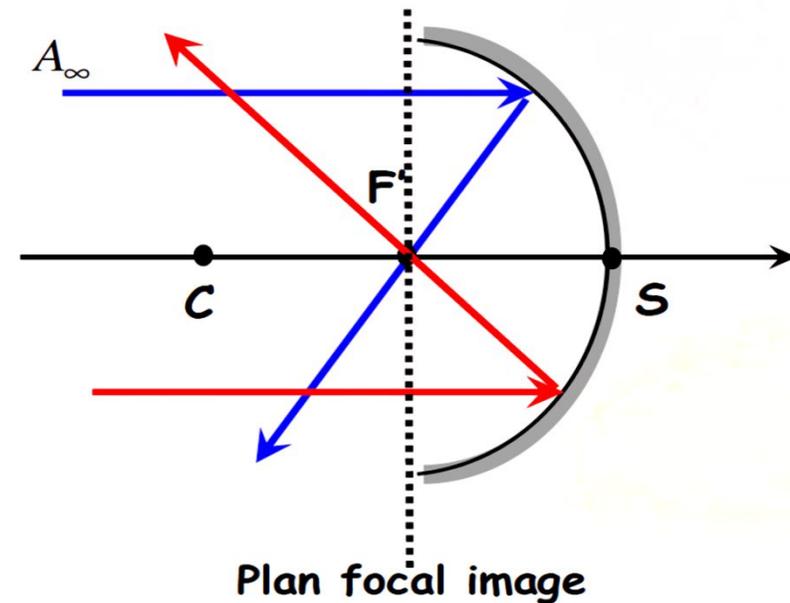
Le foyer image F' est l'image (le conjugué) d'un objet A_∞ situé à l'infini sur l'axe optique. Avec $\frac{1}{SA} = 0$; on obtient :

$$\frac{1}{SF'} = \frac{2}{R} \Rightarrow \boxed{\overline{SF'} = \frac{R}{2}}$$

Le foyer image F' est situé au milieu du segment CS .

$$f' = \overline{SF'} = \frac{R}{2} : \text{distance focale image}$$

$$V' = \frac{1}{f'} : \text{Vergence image}$$



Foyer objet F

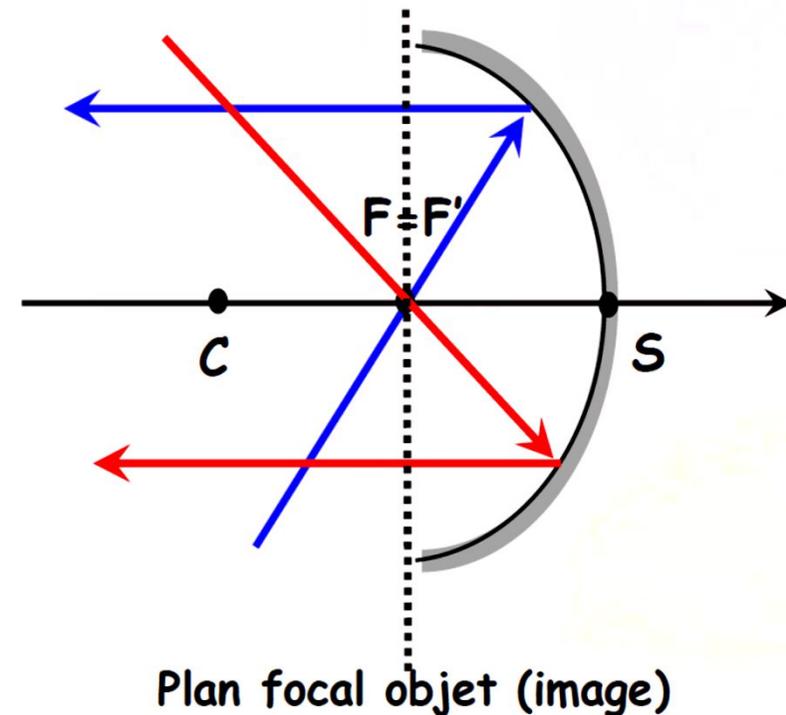
Tout rayon qui passe par le foyer objet F ressort parallèle à l'axe optique (l'image de F est rejeté à l'infini). Avec $\frac{1}{SA'} = 0$; on obtient :

$$\frac{1}{\overline{SF}} = \frac{2}{R} \Rightarrow \boxed{\overline{SF} = \frac{R}{2}} \quad (F' = F)$$

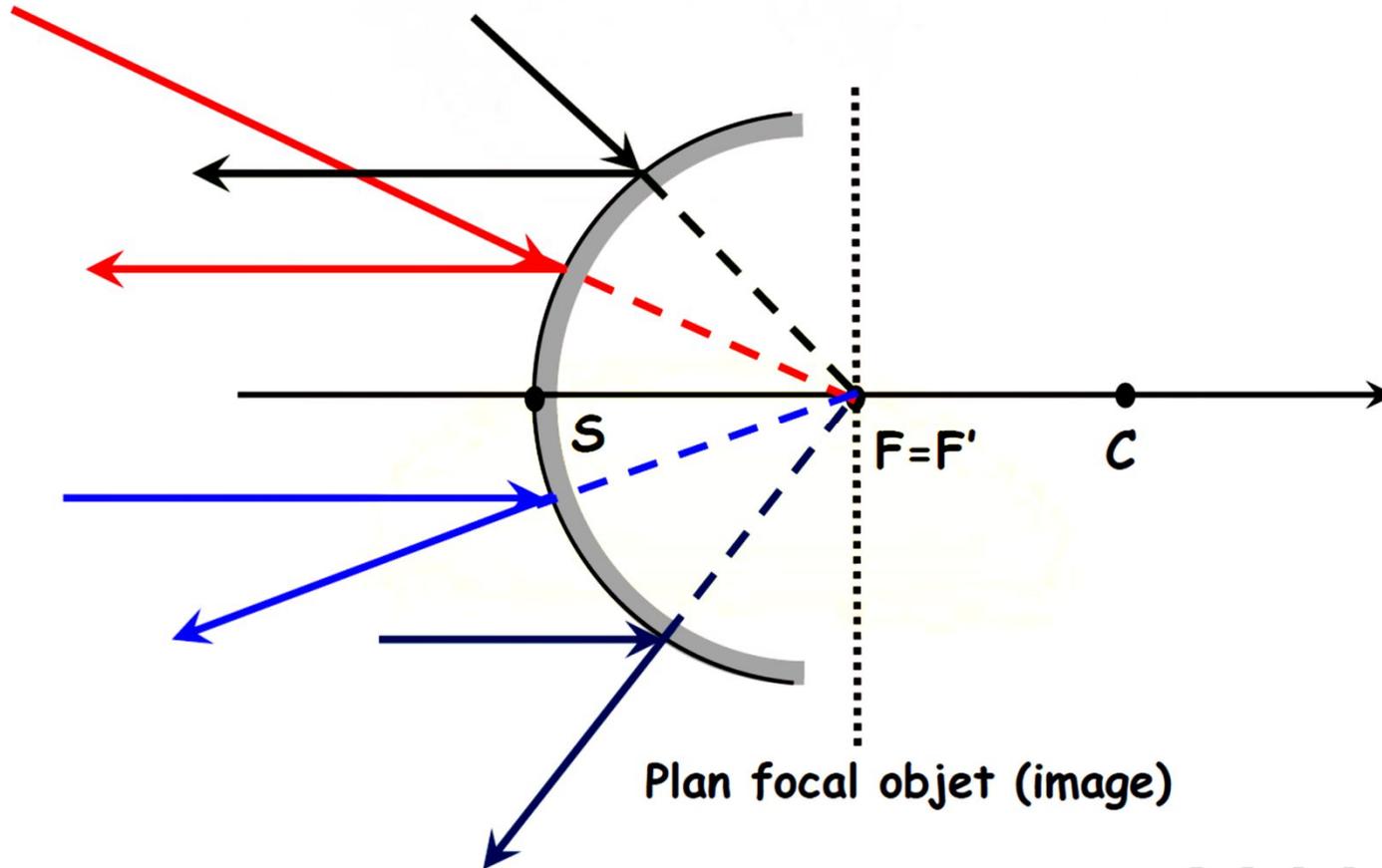
Les foyers objet et image F et F' sont confondus.

$$f = \overline{SF} = \frac{R}{2} : \text{ distance focale objet}$$

$$V = \frac{1}{f} : \text{ Vergence objet}$$



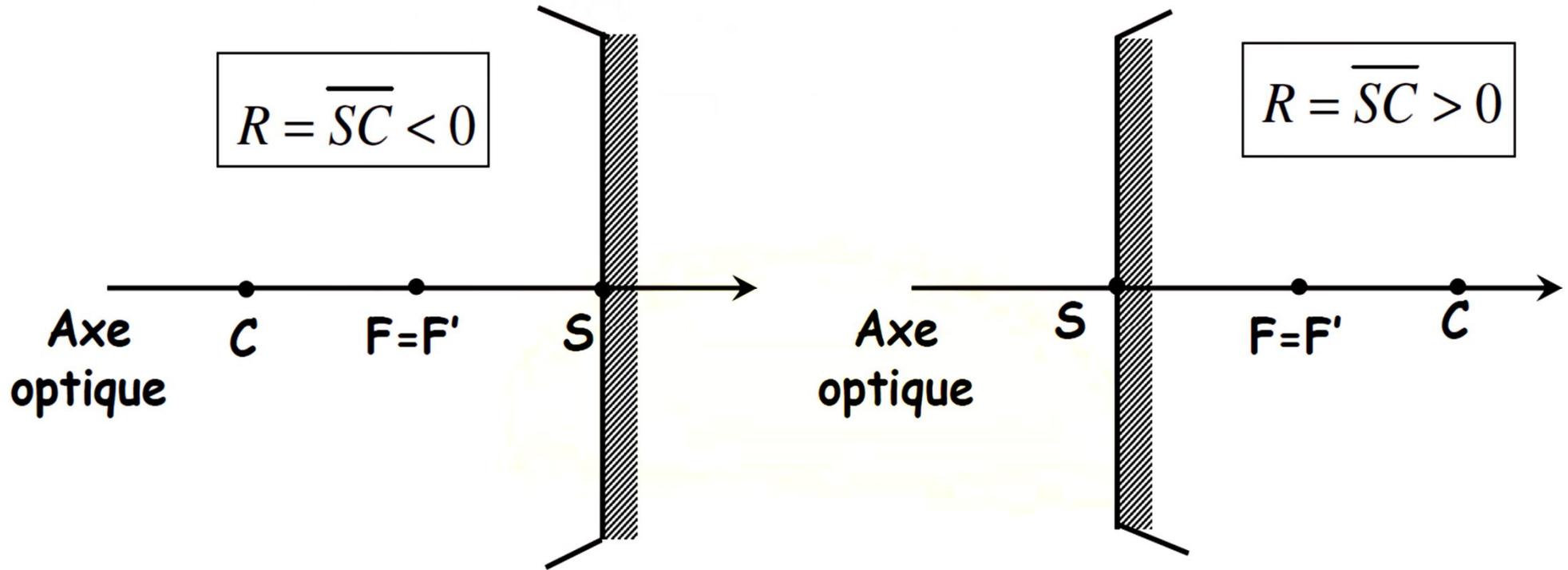
Cas du miroir convexe



D. Modélisation du miroir sphérique

Modélisation

On assimile le miroir sphérique à son plan tangent en S :



Miroir sphérique concave

Miroir sphérique convexe

E. Construction d'une image

Pour effectuer cette construction, nous allons tirer profit des propriétés des foyers, du centre C et du sommet S et utiliser des rayons particuliers.

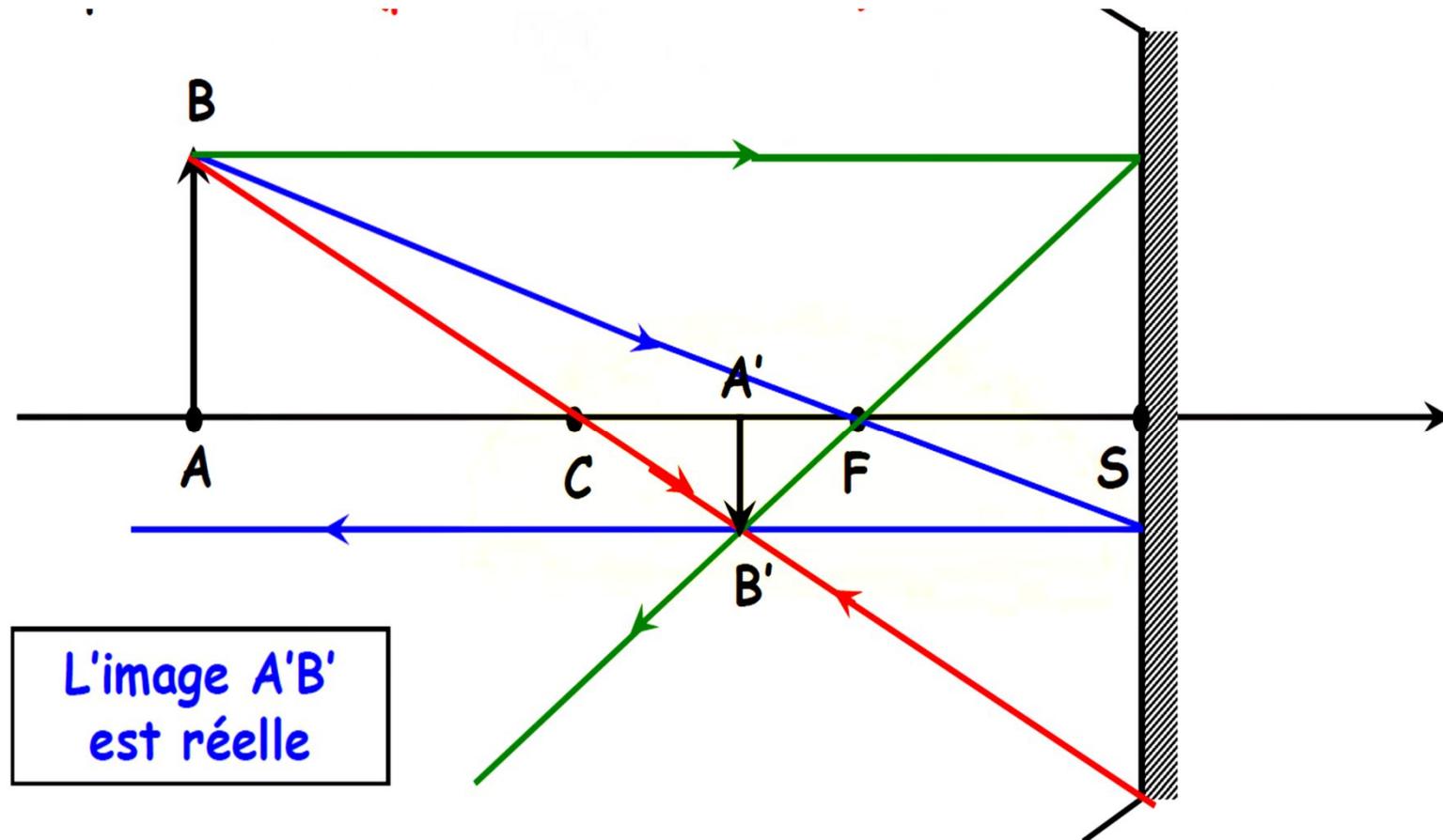
Rayons particuliers

En pratique, on choisit deux rayons parmi les rayons particuliers suivants :

- Tout rayon incident passant par le centre C , se réfléchit sur lui-même,
- Tout rayon incident passant par le foyer objet F , se réfléchit parallèlement à l'axe,
- Tout rayon incident parallèle à l'axe, se réfléchit en passant par le foyer image F' ,
- Tout rayon incident en S , se réfléchit symétriquement à l'axe optique.

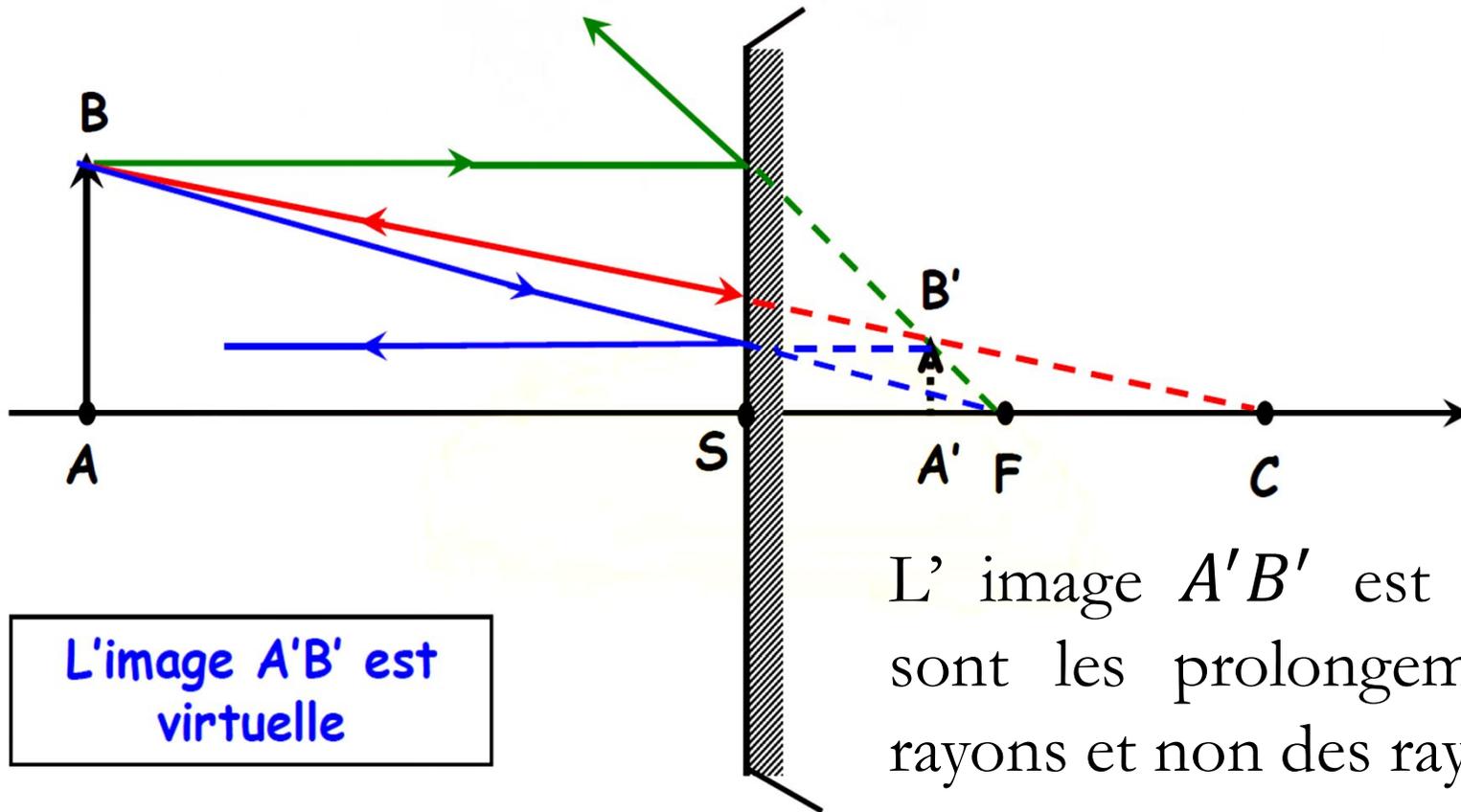
Quelques constructions (1)

- La figure suivante donne le principe de construction d'une image à l'aide de rayons particuliers pour un miroir concave



Quelques constructions (2)

- La figure suivante donne le principe de construction d'une image à l'aide de rayons particuliers pour un miroir convexe



L' image $A'B'$ est virtuelle car ce sont les prolongements issus des rayons et non des rayons eux-mêmes

Quelques constructions (3)

Remarques :

- un miroir concave ne donne jamais une image virtuelle d'un objet virtuel,
- un miroir convexe ne donne jamais une image réelle d'un objet réel,
- quel que soit le type de miroir, l'image est renversée quand elle est de même nature que l'objet et de même sens que l'objet quand elle est de nature différente.

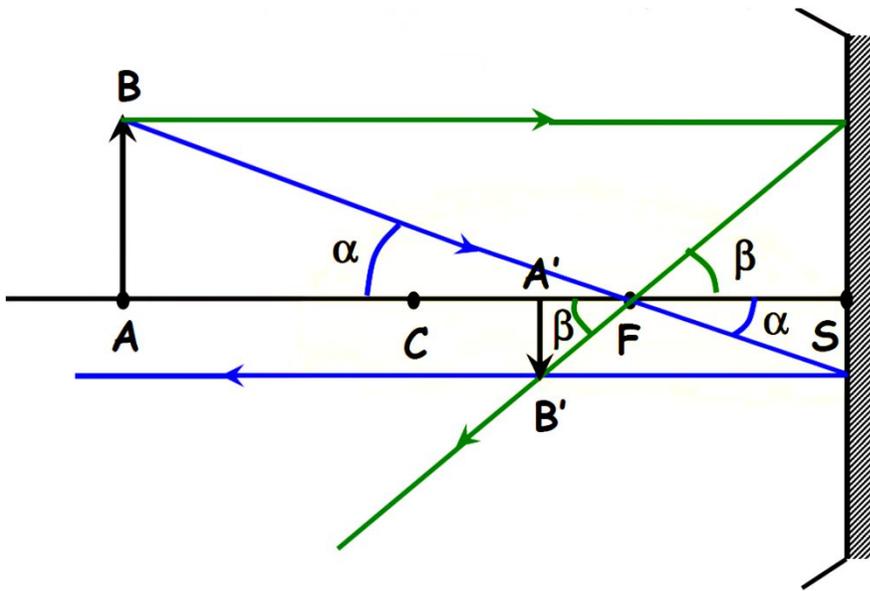
Quelques définitions

- **Objet réel** : les rayons issus de l'objet se dirigent vers le système optique.
- **Objet virtuel** : les rayons arrivent sur le système optique avant de pouvoir éclairer l'objet situé à droite du système.
- **Image réelle** : les rayons sortant du système optique se dirigent tous vers l'image. L'image peut être observée avec un écran.
- **Image virtuelle** : les rayons sortant du système optique semble tous provenir de l'image. On ne peut pas observer l'image virtuelle avec un écran.

F. Conjugaison et grandissement avec origine aux foyers (formules de Newton)

Relation de conjugaison

La démonstration est faite dans le cas d'un miroir concave. On souhaite trouver une relation entre \overline{FA} et $\overline{FA'}$



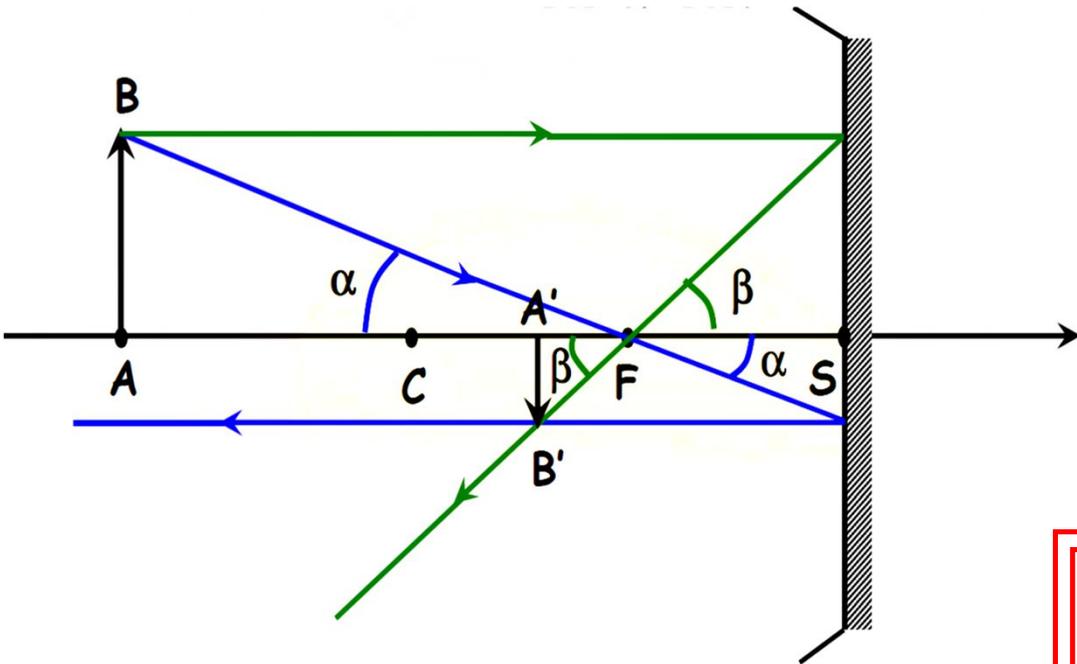
$$\alpha = -\frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{SJ}}{\overline{FS}} \quad ; \quad \beta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{FA'}} = \frac{\overline{SI}}{\overline{FS}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{SJ} = \overline{A'B'} \\ \overline{SI} = \overline{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{FS}^2 = f^2 = \frac{R^2}{4}}$$

C'est la relation de conjugaison avec origine en F (formule de Newton)

Grandissement γ



$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

$$f = \overline{SF} = -\overline{FS}$$

Il vient donc :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{FA'}}{f} = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

$\gamma > 0$: l'image est droite (même sens que l'objet)

$\gamma < 0$: l'image est renversée

G. Conjugaison et grandissement avec origine aux foyers (formules de Descartes)

Relation de conjugaison

On part de la relation $\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{FS}^2 = f^2$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{FA} = \overline{CA} - \overline{CF} \\ \overline{FA'} = \overline{CA'} - \overline{CF} \end{array} \right\} \Rightarrow (\overline{CA} - \overline{CF}) \cdot (\overline{CA'} - \overline{CF}) = f^2$$

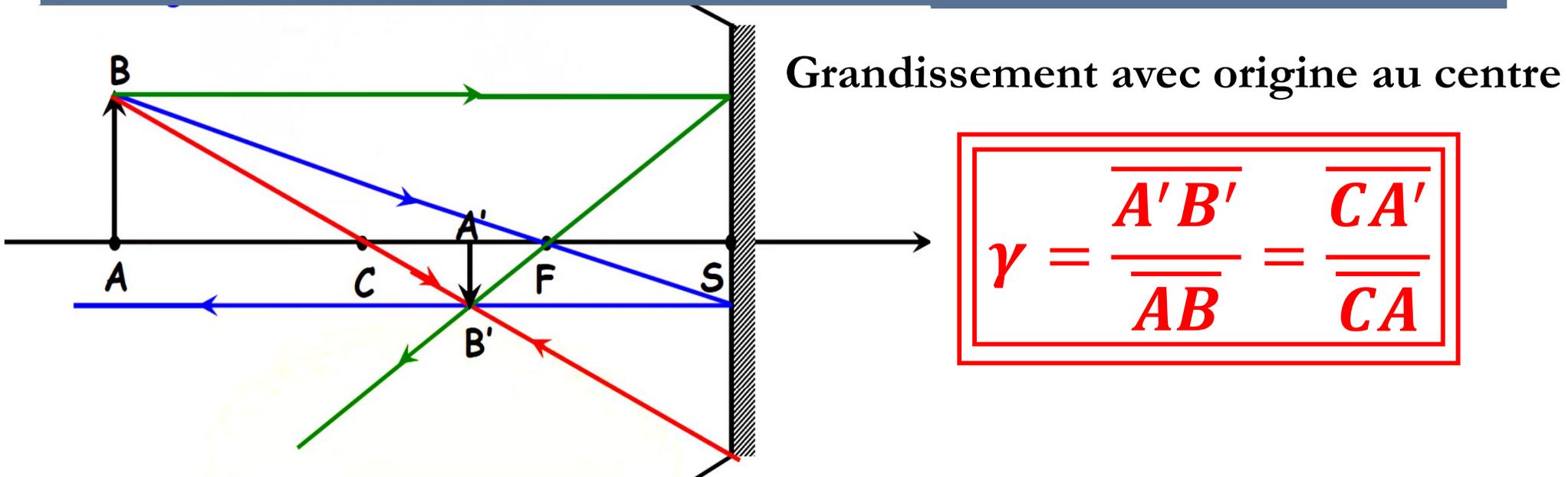
$$\Rightarrow \overline{CA} \cdot \overline{CA'} - \overline{CA} \cdot \overline{CF} - \overline{CA'} \cdot \overline{CF} + \overline{CF}^2 = f^2$$

$\overline{CF}^2 = f^2$ d'où en divisant par $\overline{CA} \cdot \overline{CA'} \cdot \overline{CF}$ il vient

$$\boxed{\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CF}} = -\frac{1}{f}}$$

C'est la relation de conjugaison avec origine au centre (formule de Descartes)

Grandissement γ



$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

On montre aussi que le **grandissement avec origine au sommet** (en utilisant le rayon passant par S) est :

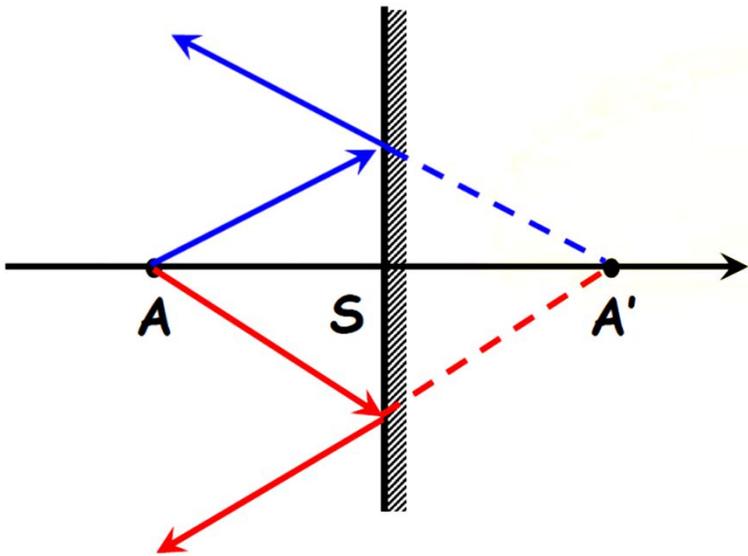
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

H. Cas particulier du miroir plan

Miroir plan

Un miroir plan est un miroir sphérique de rayon infini : le centre et les foyers sont rejetés à l'infini. **On dit que le miroir plan est « afocal » (foyers rejetés à l'infini)**

La formule de conjugaison avec origine au sommet donne immédiatement : **$\overline{SA'} = -\overline{SA}$**



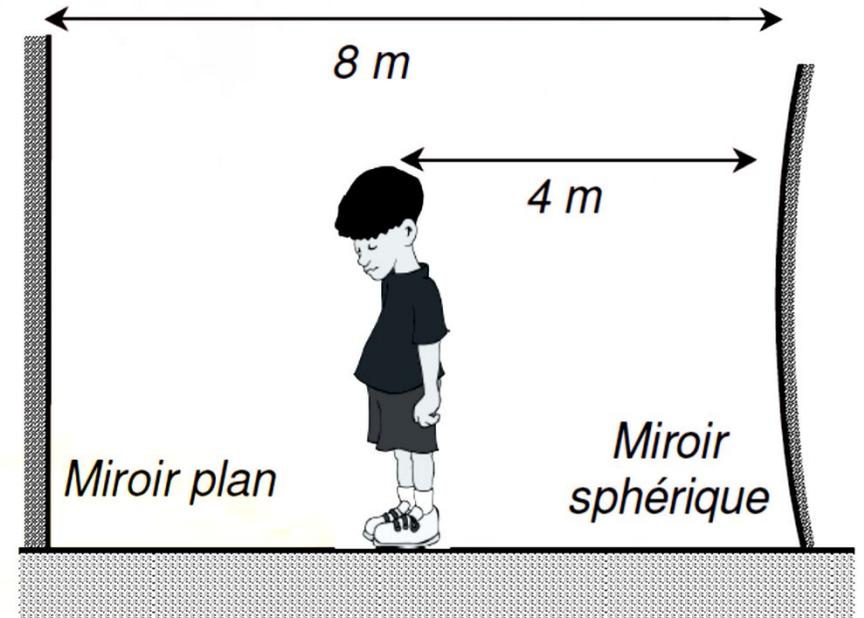
L'image A' de A est le symétrique de A par rapport au plan du miroir. A' est une image virtuelle. Le grandissement vaut 1.

Le miroir plan est rigoureusement stigmatique et aplanétique.

Exercice d'application (1)

Énoncé

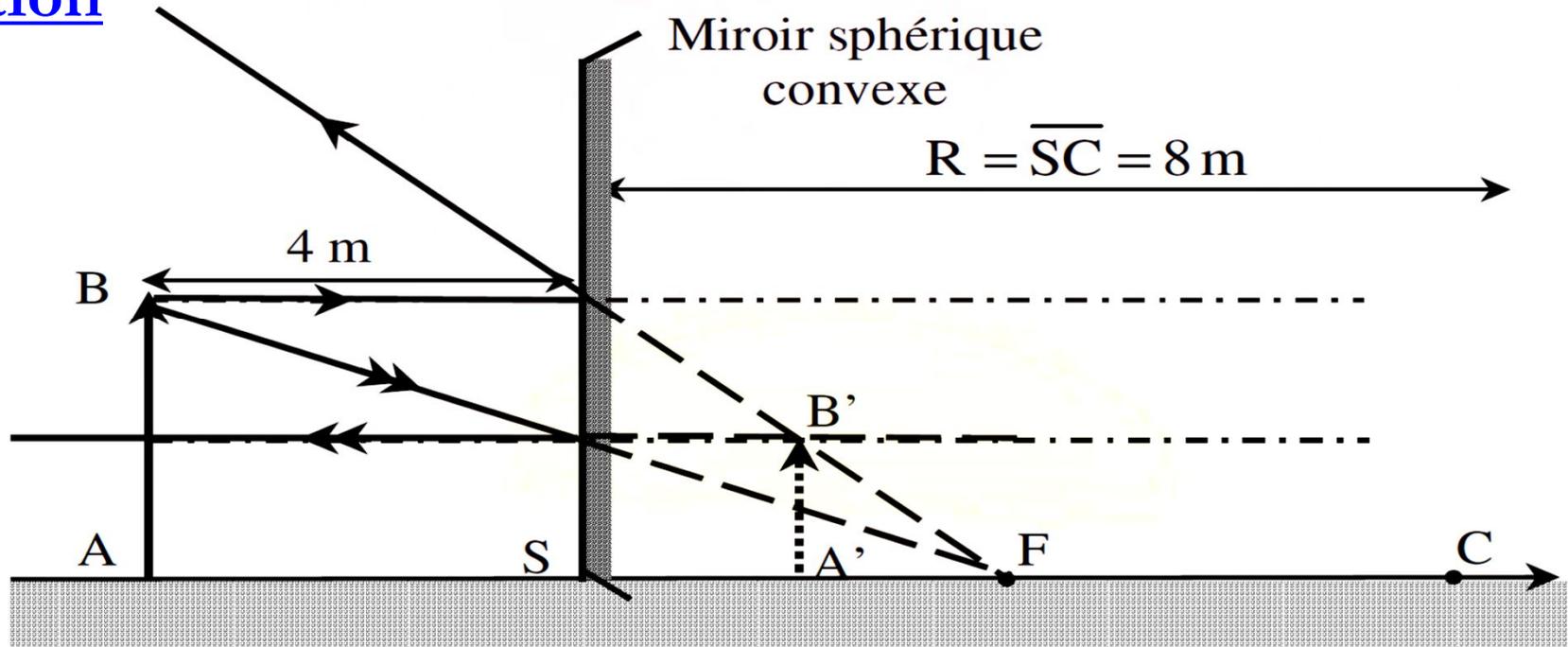
A l'occasion d'une fête foraine, un jeune enfant (de taille 1,20 m) se place à mi-chemin d'un miroir plan et d'un miroir sphérique convexe, distants l'un de l'autre de 8 m.



L'enfant, amusé, constate qu'il se voit deux fois plus grand à travers le miroir plan qu'à travers le miroir sphérique. Déterminer le rayon R du miroir sphérique.

Exercice d'application (2)

Solution



L'enfant se voit, à travers le miroir plan, à sa taille normale ; par conséquent, le grandissement g donné par le miroir sphérique vaut $\gamma = 1/2$. (la figure, dans laquelle l'enfant est schématisé par le segment AB, précise les notations utilisées).

Exercice d'application (3)

La formule du grandissement, avec l'origine au foyer F, s'écrit :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{FA'}}{f} = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

où la distance focale f est reliée au rayon (algébrique) $R = \overline{SC}$ du miroir sphérique par $f = R/2$. Comme $\gamma = 1/2$, on déduit que $\overline{FA} = -2f = -R$

$$\text{Or : } \overline{FA} = \overline{FS} + \overline{SA}$$

Soit

$$-R = -\frac{R}{2} + \overline{SA} \Rightarrow R = -2\overline{SA}$$

Finalement avec $\overline{SA} = -4 \text{ m}$, il vient $R = -2\overline{SA} = 8 \text{ m}$